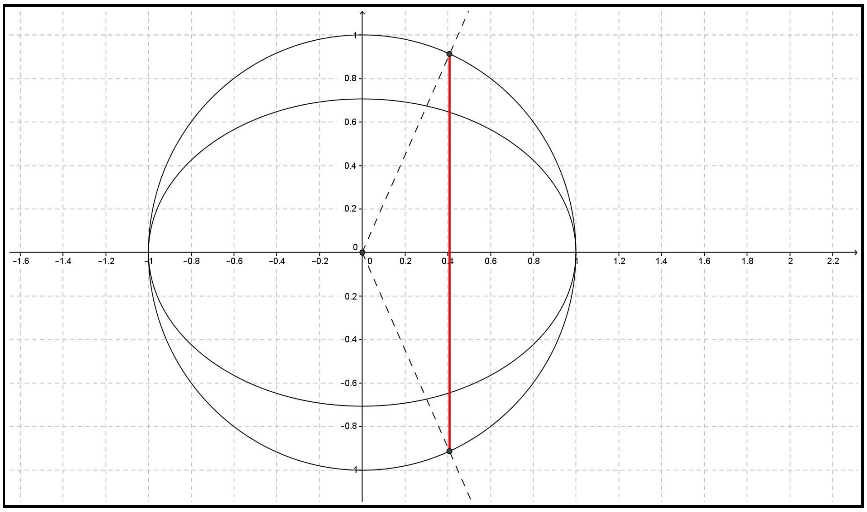
La divisione dell'ellisse in parti equivalenti

Osserviamo che l'ellisse gode di una importante proprietà che può essere utilizzata per risolvere il problema della sua divisione in parti equivalenti:



<u>Proprietà</u>: una qualsiasi retta che sia perpendicolare all'asse maggiore di un'ellisse stacca su questa e sulla circonferenza tangente esternamente all'ellisse stessa due corde il cui rapporto è indipendente dalla posizione della retta.

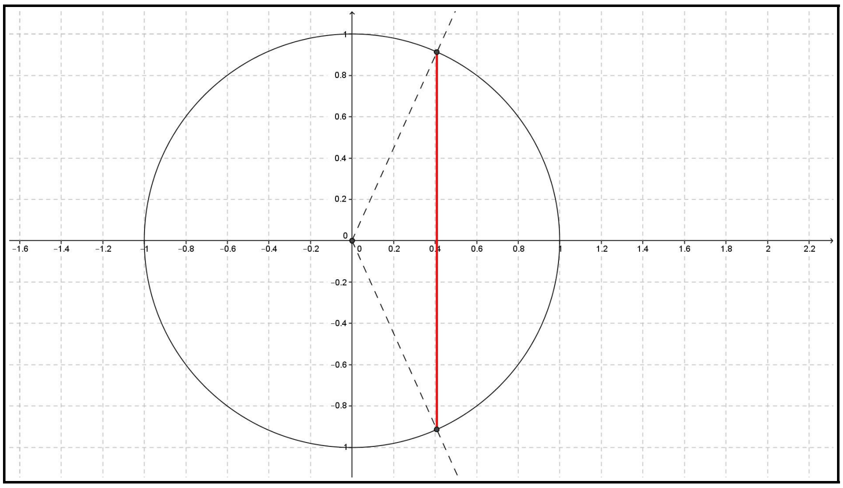
In riferimento alla figura, la corda staccata sulla circonferenza grande e quella staccata sull'ellisse stanno tra loro in un rapporto costante; tale rapporto è b/a, dove a e b sono rispettivamente il semiasse maggiore e minore dell'ellisse.

Infatti, consideriamo la circonferenza tangente che ha equazione $x^2+y^2=a^2$ e facciamola intersecare con la retta di equazione $x=k$, con $-a<k<a$. Le y dei due punti di intersezione sono $\pm\sqrt{a^2-k^2}$, cosicché la lunghezza della corda staccata sulla circonferenza è $2\sqrt{a^2-k^2}$.

Adesso intersechiamo la stessa retta con l'ellisse, che ha equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; otteniamo due punti le cui coordinate y sono rispettivamente $\pm b\sqrt{1-\frac{k^2}{a^2}}$, a cui corrisponde una corda di lunghezza $2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-k^2}$. Il rapporto tra la lunghezza della corda staccata sull'ellisse e quella della corda staccata sulla circonferenza risulta pertanto essere $\frac{b}{a}$, indipendente da k.

Consideriamo adesso la regione compresa tra due rette verticali e suddividiamola idealmente in un gran numero di striscioline molto strette, talmente strette da poter approssimare con dei rettangoli le regioni da esse staccate sull'ellisse e sulla circonferenza. Poiché tali coppie di rettangolini hanno la stessa base, il rapporto delle aree sarà dato dal rapporto delle rispettive altezze, cioè $\frac{b}{a}$. Applicando poi il principio di Cavalieri (cioè facendo un integrale) otteniamo che anche il rapporto tra il segmento ellittico a due basi e il segmento circolare a due basi vale $\frac{b}{a}$. Se ad esempio consideriamo la striscia delimitata dalle rette $x=a$ e $x=-a$ (cioè tutta l'ellisse e tutta la circonferenza) risulta che il rapporto tra l'area dell'ellisse e quella della circonferenza è $\frac{b}{a}$, cosicché si ritrova facilmente il noto risultato per l'area dell'ellisse $\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi a b$.

Abbiamo quindi ricondotto il complesso problema di dividere un'ellisse in parti equivalenti in quello più semplice di dividere una circonferenza in segmenti circolari equivalenti (infatti le rette perpendicolari all'asse maggiore che dividono la circonferenza tangente esternamente in segmenti circolari equivalenti dividono anche l'ellisse in segmenti ellittici equivalenti). Tale problema può essere riformulato chiedendo di determinare un segmento circolare a una base la cui superficie sia un sottomultiplo dato della superficie dell'intera circonferenza. Ricordiamo che in un cerchio di raggio R l'area del segmento circolare a una base definito da un angolo θ è la differenza tra l'area del settore circolare e quella del triangolo formato dalla corda e dai due raggi: $\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$. L'equazione che si ottiene contiene sia l'angolo espresso in radianti che il seno, si tratta quindi di una equazione trascendente che non può essere risolta in maniera analitica ma solo numericamente. Tuttavia, a causa della sua particolare forma, si può applicare il teorema del punto fisso, e quindi la soluzione si ottiene in maniera molto rapida semplicemente sostituendo in ogni iterazione a θ il valore trovato nella precedente iterazione. Supponiamo ad esempio di dover dividere la circonferenza in quattro parti equivalenti; avremo l'equazione: $\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)=\frac{1}{4}\pi R^2$, da cui $\theta-\sin\theta=\frac{\pi}{2}$. Approssimando π con 3,14 otteniamo la seguente successione che ci permette di ottenere rapidamente con l'aiuto di una calcolatrice l'angolo (in radianti) cercato: $\theta_{n+1}=\sin(\theta_n)+1{,}57$. Come si può vedere dalla tabella (in cui abbiamo preso come primo termine il valore "ragionevole" di 1) i valori – alla terza cifra decimale – convergono rapidamente alla soluzione:



Il valore trovato corrisponde a un angolo di circa 132°. Effettivamente, come si può vedere dal grafico della seconda figura, il numero di quadretti interni alla circonferenza compresi tra il segmento rosso e l'asse delle y è circa uguale (quasi 10) a quello compreso nella regione a destra del segmento rosso. La stessa verifica può essere facilmente fatta anche nella prima figura. In quel caso i quadretti interni all'ellisse tra il segmento rosso e l'asse delle y (circa 7) coincidono grosso modo con quelli nella regione a destra del segmento rosso.

1,00
2,41
2,24
2,36
2,28
2,33
2,29
2,32
2,30
2,31
2,31
...