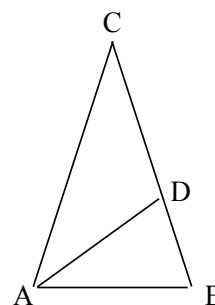


PROBLEMA

Costruire un triangolo isoscele che venga ulteriormente suddiviso in due triangoli isosceli dalla bisettrice di uno degli angoli alla base

Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB , e AD la bisettrice dell'angolo alla base in A . Si chiede di determinare il triangolo stesso (ad esempio mediante l'angolo al vertice in C o gli angoli alla base in A e B) affinché anche i due triangoli ADB e ADC siano isosceli.

Si chiede di risolvere il problema utilizzando la geometria analitica.



1. Considerazioni preliminari

- Prova a disegnare vari triangoli isosceli e domandati se la condizione richiesta dal problema (cioè che la bisettrice dell'angolo alla base divida il triangolo in due triangoli a loro volta isosceli) è sempre verificata oppure si realizza solo per una particolare forma del triangolo.
- Il problema ha una sola soluzione oppure possono esserci più triangoli diversi che obbediscono a questa condizione?
- La soluzione del problema dipende solo dalla forma del triangolo (gli angoli) o anche dalle sue dimensioni (le misure dei lati)?

2. Prerequisiti di geometria analitica

- Come si calcola la distanza tra due punti? Calcola la distanza tra $A(3;0)$ e $B(5;1)$
- Come si calcola la distanza di un punto da una retta? Calcola la distanza del punto $B(5;1)$ dalla retta di equazione $y=3x+3$
- Come si scrive l'equazione della retta passante per due punti? Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A(3;0)$ e $B(5;1)$
- Che cos'è un fascio di rette proprio? Come si scrive l'equazione del fascio di rette passante per un punto dato? Scrivi l'equazione del fascio di rette passante per il punto $A(3;0)$
- Come si scrive l'equazione della bisettrice dell'angolo formato da due rette date? Perché si trovano due equazioni diverse? Scrivi l'equazione della bisettrice con coefficiente angolare positivo dell'angolo formato dalle rette di

equazione $y=3x+3$ e $y=-x+3$

- Che relazione c'è tra i coefficienti angolari dei due lati di un triangolo isoscele avente la base parallela all'asse x ?
- Che relazione c'è tra i coefficienti angolari dei due lati di un triangolo isoscele avente la base parallela all'asse y ?
- Esiste una particolare (semplice) relazione tra i coefficienti angolari dei lati di un triangolo isoscele avente la base che non è parallela né all'asse x né all'asse y ?
- Come si calcolano le coordinate del punto di intersezione tra due rette? Si può applicare lo stesso procedimento al calcolo delle coordinate del punto di intersezione tra una retta data e la retta generica di un fascio? Calcola il punto di intersezione tra la bisettrice con coefficiente angolare positivo dell'angolo formato dalle rette di equazione $y=3x+3$ e $y=-x+3$ e la retta generica del del fascio di rette passante per il punto $A(3;0)$.

3. Costruzione del modello

Rifletti su come si possa rappresentare un generico triangolo isoscele nel piano cartesiano. Senza perdita di generalità, possiamo dare alla base del nostro triangolo una lunghezza assegnata, ad esempio $AB=2$. In questo caso (con riferimento alla figura):

- Scegli dove posizionare il vertice A (*Suggerimento: fai la scelta più semplice*)
- Scrivi le coordinate del vertice B
- Scrivi l'equazione del lato AC ; è una retta determinata o un fascio di rette?
- Scrivi l'equazione dell'asse del segmento AB
- Sei adesso in grado di scrivere le coordinate del vertice C . Ottieni valori determinati o c'è una espressione dipendente da un parametro?
- Scrivi anche l'equazione del lato BC ; è una retta determinata o un fascio di rette?

4. Sviluppo del problema

A questo punto dovresti avere le coordinate di A e B come valori determinati, nonché le equazioni dei lati AC e BC e le coordinate di C dipendenti da un solo parametro (se così non fosse torna al punto precedente e riconsidera i tuoi ragionamenti).

- Che cos'è la retta AD ?
- Imposta e risolvi l'equazione per trovare la bisettrice dell'angolo tra la base AB e il lato AC . Quante rette ottieni?
- Come fai a decidere quale retta corrisponde effettivamente a AD ?
- Calcola le coordinate del punto D (*che è l'intersezione tra...*). Ottieni valori

numerici o espressioni contenenti un parametro?

- Rileggi adesso attentamente la consegna del problema. Quali sono i due triangoli che devono essere isosceli?
- Secondo te vengono calcoli più semplici se imponiamo la condizione che il triangolo sia isoscele a ABD o a ADC? Perché?
- Lavora sul triangolo ABD; come puoi tradurre in una equazione algebrica la richiesta geometrica che il triangolo sia isoscele?

5. Calcoli e risoluzione

Ti trovi adesso di fronte ad una equazione abbastanza complicata la cui incognita è il parametro da cui dipende la forma del triangolo isoscele (se così non fosse torna ai due punti precedenti e riconsidera i tuoi ragionamenti). Nella soluzione dell'equazione ricorda che:

- se sono presenti delle radici si fa in modo di avere il radicale da una parte e poi si eleva al quadrato termine a termine
- un'equazione biquadratica (che contiene cioè solo termini di quarto e secondo grado oltre al termine noto) si risolve considerando come variabile la variabile originale elevata al quadrato, in modo da ridursi a una ordinaria equazione di secondo grado

Se poi non riesci ad avere ragione dei calcoli puoi anche optare per una soluzione approssimata ottenuta per tentativi, magari aiutandoti con il disegno (in tal caso però cerca di fornire il risultato con un appropriato numero di cifre decimali).

6. Verifica dei risultati

Una volta che hai ottenuto le coordinate del punto D verifica (magari anche passando dalle espressioni esatte con i radicali ai valori decimali approssimati):

- che effettivamente il triangolo ADB è isoscele
- che anche il triangolo ADC è isoscele

7. Considerazioni conclusive

Sei in grado – facendo riferimento ai dati del problema – di stabilire il valore degli angoli del triangolo ABC? Considerando la circonferenza di centro C che passa per A e B, quale notevole caratteristica ha la corda AB?